広義積分 留数定理 ベータ関数

夏果しぃ

広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ の値を求めよ.

1　留数定理を用いた解法

積分の範囲を拡張し

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{x^4+1}dx$$

また $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^4+1}$ と置き複素数 z に拡張し $f(z)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^4+1}$ とする. またこの時の I の範囲 C は

$$C=\lim_{R\to\infty} I_R\cup C_R$$
$$I_R=\{-R<x<R\}\ ,\ C_R=\{z=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}|0\le\theta\le\pi\}$$

であり、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz&=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx+\int_{C_\infty}f(z)dz\\&=I+\int_{C_\infty}f(z)dz.\end{aligned}\tag{1}$$

$\displaystyle\int_C f(z)dz$ について考える.

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

と置き、ここで

$$z_n^4=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2n+1)\pi}\qquad (n=0,1,2,3)$$
$$z_n=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(2n+1)}{4}\pi}\qquad (n=0,1,2,3)$$

である. 但し虚数単位 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ である. 留数を計算する.

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{1+z^4}$$

このまま極限操作を行うと不定形になるのでロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,z_0)&=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{8z_0^3}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{8}z_2\\&=\frac{1}{8\sqrt{2}}(-1-\mathrm{j})\end{aligned}$$

であるとわかる. 同様にして

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\frac{1}{8z_1^3}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{9}{4}\pi}=\frac{1}{8}z_3=\frac{1}{8\sqrt{2}}(1-\mathrm{j})$$

である. これらより

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz&=\mathrm{j}2\pi\left[\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right]\\&=\mathrm{j}2\pi\left[-1-\mathrm{j}+1-\mathrm{j}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

次に $\displaystyle\int_{C_\infty}f(z)dz$ について考える.

$$C_R=\{z=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}|0\le\theta\le\pi\}\ ,\ \frac{dz}{d\theta}=\mathrm{j}R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

と置換し

$$\begin{aligned}\int_{C_\infty}f(z)dz&=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{j}R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}d\theta\\&=\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{j}}{2R^3}\int_0^\pi\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\theta}+\frac{1}{R^4}}=0.\end{aligned}$$

以上より式 (1) から

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

となる.

2　因数分解と部分分数分解を用いた解法

分母を因数分解する.

$$\begin{aligned}x^4+1&=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\end{aligned}$$

以上より

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

となる. 部分分数分解を行うために

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{a_1x+a_0}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{a_3x+a_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\tag{2}$$

と置く. 恒等式

$$\begin{aligned}1=&(a_1x+a_0)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(a_3x+a_2)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\=&x^3(a_1+a_3)+x^2(-\sqrt{2}a_1+a_0+\sqrt{2}a_3+a_2)\\&+x(a_1-\sqrt{2}a_0+a_3+\sqrt{2}a_2)+(a_0+a_2)\end{aligned}$$

に対して両辺で同じ次数で等しくなるため

$$\begin{aligned}a_1+a_3&=0\\-\sqrt{2}a_1+a_0+\sqrt{2}a_3+a_2&=0\\a_1-\sqrt{2}a_0+a_3+\sqrt{2}a_2&=0\\a_0+a_2&=1.\end{aligned}$$

となる. この連立一次方程式を解き $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
式 (2) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} =& \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\
=& \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right. \\
& \left. + \frac{2}{1 + (\sqrt{2}x - 1)^2} + \frac{2}{1 + (\sqrt{2}x + 1)^2} \right)
\end{aligned}
$$

となる. 積分すると

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{4}\int_0^\infty \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right. \\
& \left. + \frac{2}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} + \frac{2}{1 + (\sqrt{2} + 1)^2} \right) dx \\
=& \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right. \\
& \left. + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x + 1) \right]_0^\infty \\
=& \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \right. \\
& \left. + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x + 1) \right]_0^\infty \\
=& \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \right. \\
& \left. - \lim_{x\to 0}\log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \right] + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} - 0 \right).
\end{aligned}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) &= \log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\
&= \log 1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) &= \log\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\
&= \log 1 = 0
\end{aligned}
$$

より $I = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

3　ベータ関数を用いた解法

I に関して

$$
x^4 = y\ ,\ dx = \frac{1}{4y^{\frac{3}{4}}}dy\ ,\ 0 \le y \le \infty
$$

と置換し

$$
I = \int_0^\infty \frac{1}{1+y}\frac{dy}{4y^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{y^{-\frac{3}{4}}}{1+y}dy
$$

となる. ここでベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ とガンマ関数 $\Gamma(s)$ の関係式

$$
\mathrm{B}(l,m) = \int_0^\infty \frac{y^{l-1}}{(1+y)^{l+m}}dy = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}
$$

を準備する.I は

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} \\
&= \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}).
\end{aligned}
$$

となる. 相反公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ を用いて

$$
I = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi
$$

となる.